

Berechnung der Druckverteilung der ebenen Platte im Gitterverband

Scholz, Norbert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 5, 1953,
S. 152-163



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Berechnung der Druckverteilung der ebenen Platte im Gitterverband

Von Norbert Scholz

Vorgelegt von Herrn H. Schlichting

Mit 4 Abbildungen

Summary: A conformal mapping of cascades with flat plate profiles is explained. A formula is derived for the velocity distribution on the flat plate in cascade with arbitrary solidity and angle of stagger. As an example the pressure distribution on a flat plate is calculated for the solidity $t/l = 0,5$ and angles of stagger $\lambda = 0^\circ, 30^\circ$ and 60° .

1. Einleitung

Wie in der Theorie des Einzelprofiles, so besitzt die angestellte ebene Platte auch im ebenen Gitter eine grundsätzliche Bedeutung, da sie als Grundelement zur Erzeugung des Anstellwinkels eines beliebigen Schaufelprofiles angesehen werden kann. Trotzdem ist dieser Fall bisher in der Literatur noch nicht erschöpfend behandelt worden. Für das ungestaffelte und das mit 90° gestaffelte Plattengitter sind von R. Grammel [1] bereits vor langer Zeit geschlossene Lösungen für die Geschwindigkeitsverteilung an der Plattenkontur angegeben worden. Die Verallgemeinerung dieser Lösung für das gestaffelte Gitter ergibt jedoch Profilkonturen, die keine geraden Strecken sind. Das Plattengitter mit beliebiger Staffelung ist später von F. Weinig [2] ausführlich untersucht worden. Obgleich die vollständige Lösung des Problems dort mitgeteilt wurde, sind die angegebenen Beziehungen doch für die praktische Handhabung ziemlich schwer zugänglich. Insbesondere fehlen numerische Angaben für die auftretenden universellen Parameter, die für eine einfache und schnelle Durchführung der Rechnung erforderlich sind. Schließlich ist in dem Handbuchbeitrag von Th. v. Kármán und J. M. Burgers [3] das ebene Plattengitter auf ähnlichem Wege behandelt worden, wobei jedoch nur die grundlegenden Beziehungen abgeleitet werden.

Wir lehnen uns im folgenden an die von v. Kármán und Burgers gegebene Darstellung an. Wegen der Wichtigkeit dieses grundlegenden Problems der Schaufelgitterströmung erscheint es angebracht, zunächst durch eine schrittweise Synthese dieser Strömung zum anschaulichen Verständnis der konformen Abbildung der Plattengitterströmung beizutragen. Schließlich sollen eine auch ohne Kenntnis der mathematischen Zusammenhänge zu handhabende Formel für die Geschwindigkeitsverteilung der angestellten ebenen Platte im Gitterverband abgeleitet und die hierzu erforderlichen universellen Parameter tabellarisch mitgeteilt werden.

2. Die Abbildungs- und Strömungsfunktion

Die gestellte Aufgabe besteht zunächst darin, alle als ein Gitter mit bestimmter Teilung t und Staffelung λ angeordneten ebenen Platten der Länge l als doppelt durchfahrene Strecken (Schlitze) auf eine einzige Kreiskontur abzubilden. Als geeignete Abbildungsfunktion bietet sich hierbei die Funktion

$$\zeta = \ln z = \ln r + i(\varphi + n \cdot 2\pi) \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

mit $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Diese bildet wegen der unendlichen Vieldeutigkeit des Imaginärteiles die z -Ebene in unendlich viele parallele Streifen endlicher Breite der ζ -Ebene ab. (Riemannsche Blätter.)

Für den Fall der Plattenströmung ohne Zirkulation ist die komplexe Strömungsfunktion in der z -Ebene bei allen Gitteranordnungen $F(z) = U_{\infty} z$, da die Strömung eine Translationsströmung parallel zur x -Achse ist. Ist $z(\zeta)$ eine Abbildungsfunktion, die die gewünschte Abbildung zwischen dem Kreis der ζ -Ebene und dem Plattengitter der z -Ebene vermittelt, so kann die Strömungsfunktion

$$F(\zeta) = U_{\infty} z(\zeta) \quad (2)$$

als eine Strömung in der ζ -Ebene aufgefaßt werden, die den Abbildungskreis als Stromlinie enthält. Die komplexe Geschwindigkeit in der z -Ebene ist dann nämlich:

$$w(z) = w(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = U_{\infty} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = U_{\infty}, \quad (3)$$

also in der ganzen Ebene konstant. Damit ist auch die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ als eine Strömung in der ζ -Ebene gedeutet, was für die Anschaulichkeit der einzelnen Abbildungsschritte von besonderem Wert erscheint.

Die Strömungsfunktion $F(\zeta)$ und die daraus resultierende Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ lassen sich nun entsprechend der Schreibweise nach v. Kármán und Burgers [3] aus folgenden Teilströmungen aufbauen, Abb. 1:

Eine Verallgemeinerung der Kreiszyylinderströmung, die als Strömung zwischen je einem Dipol im Ursprung und im unendlich fernen Punkt der z -Ebene aufgefaßt werden kann, stellt die Strömung „1“ dar, bei der statt der Dipole Quellsenkenpaare in endlichen Abständen auftreten. Die Lage der Quellsenkenpaare auf der ζ -Achse bestimmt sich daraus, daß die Kreiskontur als Stromlinie erhalten bleibt (Spiegelung an der Kreiskontur). Eine Abbildung dieser Strömung mit Hilfe der nach Gl. (2) gebildeten Abbildungsfunktion ergibt wegen Gl. (3) die Translationsströmung U_{∞} in der z -Ebene. Die Kreiskontur geht dabei in unendlich viele Schlitze parallel zur x -Achse über, die periodisch im Abstand der Teilung t längs der y -Achse angeordnet sind. Wir erhalten damit in der z -Ebene ein ungestaffeltes Plattengitter, dessen Teilungsverhältnis t/l (Gitterteilung t zu Plattentiefe l) durch den Parameter κ (Entfernung des inneren Quellsenkenpaares vom Nullpunkt) eindeutig bestimmt wird.

ξ - Ebene	z - Ebene
<p>1</p> $F_1(\xi) = \frac{U_0 t}{2\pi} \left[\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$ $z_1(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z_1(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$
<p>2</p> $F_2(\xi) = i \frac{U_0 t}{2\pi} \left[-\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$ $z_2(\xi) = i \frac{t}{2\pi} \left[-\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z_2(\xi) = i \frac{t}{2\pi} \left[-\ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$
<p>1 + 2</p> $F_1(\xi) + F_2(\xi) = \frac{U_0 t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$ $z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$
<p>3 + 4</p> $F_3(\xi) + F_4(\xi) = \frac{U_0 t}{2\pi} \left[e^{-i(\lambda + \alpha_0)} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i(\lambda + \alpha_0)} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$ $z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$
<p>5</p> $F_5(\xi) = i \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\xi^2 - \xi^2}{\xi^2 - \frac{1}{\xi^2}}$ $z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$
<p>3 + 4 + 5</p> $F(\xi) = F_1(\xi) + F_2(\xi) + F_3(\xi)$ $z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$	$z(\xi) = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda} \ln \frac{\frac{1}{\xi} + \xi}{\frac{1}{\xi} - \xi} + e^{i\lambda} \ln \frac{\xi + \xi}{\xi - \xi} \right]$

Abb. 1. Konforme Abbildung eines gestaffelten Gitters aus ebenen angestellten Platten auf den Einheitskreis.
 $F(\xi)$ = Strömungsfunktion der Kreiszylinderströmung in der ξ -Ebene; $z(\xi)$ = Abbildungsfunktion für die Kreiszylinderströmung der z -Ebene; E = Quellstärke der Quell-Senkenpaare; G = Wirbelstärke der Wirbelpaare; Γ = Zirkulation der äußeren und inneren Kreiszylinderströmung;
 V = Plattenvorderkante, H = Plattenhinterkante, $St.P.$ = Staupunkt

Eine andere Verallgemeinerung der Kreiszylinderströmung stellt die Strömung „2“ dar, bei der die Quellsenkenpaare durch gegensinnig drehende Potentialwirbel ersetzt sind. Die entsprechende Abbildung liefert wiederum die Translationsströmung U_∞ in der z -Ebene, wobei jetzt jedoch die Kreiskontur in ein Plattengitter übergeht, dessen Teilung sich längs der x -Achse erstreckt (90° gestaffelt). Die Überlagerung der Strömungen „1“ und „2“ liefert schließlich eine Kreiszylinderströmung, deren Abbildung die plattenparallele Durchströmung eines unter dem Winkel λ gestaffelten Gitters aus ebenen Platten ergibt. Damit ist zunächst die Abbildungsfunktion für ein beliebiges Plattengitter gefunden. Sie lautet (vgl. [3]):

$$z(\zeta) = \frac{1}{U_\infty} [F_1(\zeta) + F_2(\zeta)] = \frac{t}{2\pi} \left[e^{-i\lambda \ln \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{\zeta - \kappa}} + e^{i\lambda \ln \frac{\zeta + \kappa}{\zeta - \kappa}} \right]. \quad (4)$$

Um nun die Strömung durch ein Plattengitter mit Anstellung der Platten gegen die Translationsströmung zu erhalten, ist die Strömung in der ζ -Ebene zunächst so abzuändern, daß in der ζ -Ebene eine um den Winkel α_g gegen die x -Achse geneigte Translationsströmung W_∞ auftritt. Dies wird aus der bisherigen Strömung „1“ plus „2“ durch Hinzufügen des Winkels α_g zum Staffelungswinkel λ erreicht, woraus sich die Strömung „3“ plus „4“ ergibt. Die Abbildung dieser Strömung mit der Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ nach Gl. (4) hat eine Umströmung der Plattenvorder- und Plattenhinterkanten in der ζ -Ebene zur Folge (Plattenströmung ohne Zirkulation). Um die Kuttasche Abflußbedingung an den Hinterkanten der Platten zu erfüllen, muß die Kreiszylinderströmung eine solche Zirkulation erhalten, daß der hintere Staupunkt in denjenigen Punkt der Kreiskontur verschoben wird, der bei der Abbildung in die Plattenhinterkanten übergeht. Dies geschieht durch Hinzufügen der Teilströmung „5“, deren Abbildung auf die z -Ebene eine rein zirkulatorische Umströmung der Platten ergibt. Die aus den Teilströmungen „3“ plus „4“ plus „5“ erhaltene Gesamtströmung besitzt die Strömungsfunktion (vgl. [3]):

$$F(z) = F_3(z) + F_4(z) + F_5(z) \\ = \frac{W_\infty t}{2\pi} \left[e^{-(\lambda + \alpha_g) \ln \frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta}{\zeta - \kappa}} + e^{i(\lambda + \alpha_g) \ln \frac{\zeta + \kappa}{\zeta - \kappa}} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta^2 - \kappa^2}{\zeta^2 - \frac{1}{\kappa^2}}. \quad (5)$$

Ihre Abbildung mit Hilfe der Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ nach Gl. (4) ergibt die Umströmung eines beliebigen Gitters aus angestellten ebenen Platten mit glattem Abfluß an den Hinterkanten. Infolge der gitterfrontparallelen Strömungskomponenten der Zirkulationsströmung „5“ weit vor und weit hinter dem Gitter erhalten wir dort Translationsströmungen mit verschiedener Geschwindigkeitsrichtung W_1 und W_2 , deren vektorieller Mittelwert gleich der Translationsströmung W_∞ ist.

3. Die Geschwindigkeitsverteilung längs der ebenen Platte

Die Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Platte wird mit Hilfe der komplexen Geschwindigkeit durch

$$w(z) = w(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dF/d\zeta}{dz/d\zeta} \quad (6)$$

mit $F(\zeta)$ nach Gl. (5) und $z(\zeta)$ nach Gl. (4) erhalten, wobei wegen des Verschwindens der Normalkomponente an der Platte der Imaginärteil von $w(z)$ identisch Null wird. Da die Abbildungsfunktion entsprechend Gl. (2) auch als Strömungsfunktion aufgefaßt wird, deren Ableitung eine komplexe Geschwindigkeit in der ζ -Ebene liefert, kann die komplexe Geschwindigkeit an der Platte durch die komplexen Geschwindigkeiten der im vorangegangenen beschriebenen Teilströmungen „1“ bis „5“, Abb. 1, ausgedrückt werden:

$$w(z) = u - iv = \frac{w_3(\zeta) + w_4(\zeta) + w_5(\zeta)}{1} \cdot \frac{1}{U_\infty [w_1(\zeta) + w_2(\zeta)]} \quad (7)$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil ergibt die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\frac{u(z)}{U_\infty} = \frac{(u_3 + u_4 + u_5)(u_1 + u_2) + (v_3 + v_4 + v_5)(v_1 + v_2)}{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2}, \quad (8)$$

$$\frac{v(z)}{U_\infty} = 0 = \frac{(v_3 + v_4 + v_5)(u_1 + u_2) - (u_3 + u_4 + u_5)(v_1 + v_2)}{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2}. \quad (9)$$

Die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten der einzelnen Teilströmungen soll hier übergangen und nur das Ergebnis angegeben werden. Aus Gl. (4) erhält man durch Bilden von $dF_1/d\zeta$ und $dF_2/d\zeta$ und Trennung in Real- und Imaginärteil die Geschwindigkeiten w_1 und w_2 auf der Kreiskontur, also für $\zeta = e^{i\varphi}$:

$$w_1 = u_1 - iv_1 = \frac{U_\infty t \cdot \kappa}{\pi} (1 + \kappa^2) \cos \lambda \frac{(1 - \cos 2\varphi) + i \sin 2\varphi}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}, \quad (10)$$

$$w_2 = u_2 - iv_2 = \frac{U_\infty t \cdot \kappa}{\pi} (1 - \kappa^2) \sin \lambda \frac{-\sin 2\varphi - i(1 + \cos 2\varphi)}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}. \quad (11)$$

Entsprechend ergeben sich die Teilströmungen w_3 und w_4 , die sich gegenüber w_1 und w_2 nur durch Hinzufügen des Anstellwinkels α_g zum Staffelungswinkel λ unterscheiden:

$$w_3 = u_3 - iv_3 = \frac{W_\infty t \cdot \kappa}{\pi} (1 + \kappa^2) \cos (\lambda + \alpha_g) \frac{1 - \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}, \quad (12)$$

$$w_4 = u_4 - iv_4 = \frac{W_\infty t \cdot \kappa}{\pi} (1 - \kappa^2) \sin (\lambda + \alpha_g) \frac{-\sin 2\varphi - i(1 + \cos 2\varphi)}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}. \quad (13)$$

Schließlich wird für die die Zirkulationsströmung ergebende Teilströmung w_5 erhalten:

$$w_5 = u_5 - i v_5 = \frac{\Gamma}{2\pi} (1 - \kappa^4) \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}. \quad (14)$$

Die Gesamtzirkulation Γ um den Kreiszyylinder bzw. eine Platte innerhalb des Gitters drücken wir zunächst durch die Zirkulation einer einzelstehenden ebenen Platte $\Gamma_0 = \pi \cdot l \cdot W_\infty \sin \alpha_g$ aus, indem wir den Einflußfaktor der Gitterstellung $k_0 = \Gamma/\Gamma_0$ einführen. Erweitern wir noch aus formalen Gründen mit $t\kappa$, so wird:

$$\Gamma = k_0 \Gamma_0 = W_\infty \cdot t \cdot \kappa k_0 \frac{\pi l}{t} \frac{1}{\kappa} \sin \alpha_g, \quad (15)$$

und nach Einführung in Gl. (14):

$$w_5 = u_5 - i v_5 = \frac{W_\infty t \cdot \kappa}{\pi} \sin \alpha_g \frac{\pi l}{2t} k_0 \frac{1 - \kappa^4}{\kappa} \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{4\kappa^2 \sin^2 \varphi + (1 - \kappa^2)^2}. \quad (16)$$

Das Einsetzen dieser hier erhaltenen Teilgeschwindigkeiten in Gl. (8) bzw. (9) bringt einen etwas umfangreichen Ausdruck, der sich jedoch insbesondere nach Aufspalten der in Gl. (12) und (13) enthaltenen Winkelsumme $(\lambda + \alpha_g)$ durch die Additionstheoreme weiter vereinfachen läßt. Bezieht man die Geschwindigkeiten auf die Komponente der Translationsgeschwindigkeit W_∞ in x -Richtung, also $U_x = W_\infty \cos \alpha_g$, so erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung längs der ebenen Platte im Gitterverband:

$$\begin{aligned} \frac{U}{U_\infty} &= 1 + \operatorname{tg} \alpha_g \\ &\cdot \frac{\sin \lambda \cos \lambda \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} (1 + \cos 2\varphi) - \sin \lambda \cos \lambda \frac{1 + \kappa^2}{1 - \kappa^2} (1 - \cos 2\varphi) - \cos 2\lambda \sin 2\varphi}{\frac{1 + \kappa^2}{1 - \kappa^2} \cos^2 \lambda (1 - \cos^2 \varphi)} \\ &+ k_0 \frac{\pi l}{2t} \cos \lambda \frac{1 + \kappa^2}{\kappa} \sin \varphi - k_0 \frac{\pi l}{2t} \sin \lambda \frac{1 - \kappa^2}{\kappa} \cos \varphi \\ &+ \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \sin^2 \lambda (1 + \cos 2\varphi) - \sin 2\lambda \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (17)$$

Ferner läßt sich verifizieren, daß $V/U_\infty \rightarrow 0$ wird. Gl. (17) stellt die Geschwindigkeitsverteilung längs der ebenen Platte als Funktion des Kreiswinkels φ dar, dessen Zusammenhang mit der Koordinate x längs der Platte durch die Abbildungsfunktion Gl. (4) gegeben ist. Eine explizite Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung als Funktion von x läßt sich nur im Falle des ungestaffelten und 90°-gestaffelten Gitters finden und ist bereits von R. Grammel [1] angegeben worden.

Die Zerlegung der Abbildungsfunktionen $z(\zeta)$ nach Gl. (4) in Real- und Imaginärteil für den Einheitskreis $\zeta = e^{i\varphi}$ liefert als Realteil die Koordinate x längs der Platte als Funktion des Kreiswinkels φ , während y als Imaginärteil der Abbildungsfunktion identisch Null wird. Man erhält:

$$\frac{x}{l/2} = \frac{t}{l} \frac{1}{\pi} \left\{ \cos \lambda \ln \frac{\kappa^2 + 1 + 2\kappa \cos \varphi}{\kappa^2 - 1 - 2\kappa \cos \varphi} + 2 \sin \lambda \operatorname{arctg} \left(\frac{2\kappa}{1 - \kappa^2} \sin \varphi \right) \right\}, \quad (18)$$

wobei für $0^\circ < \varphi < 360^\circ$ die dimensionslose Koordinate $\frac{x}{l/2}$ die Strecke zwischen $+1$ und -1 zweimal durchläuft. Die für die Auswertung günstigere Umkehrfunktion $\varphi = f(x)$ läßt sich nicht angeben. Es muß also der Kreiswinkel φ vorgegeben und hierzu sowohl die Geschwindigkeit nach Gl. (17) als auch der zugehörige x -Wert an der Platte nach Gl. (18) ermittelt werden. Der zu den Plattenenden gehörige Kreiswinkel kann ferner noch aus

$$\operatorname{tg} \varphi_{x=\pm l/2} = \frac{1 - \kappa^2}{1 + \kappa^2} \operatorname{tg} \lambda \quad (19)$$

ermittelt werden.

Der Zusammenhang der noch freien Parameter κ und k_0 mit den geometrischen Parametern der Gitteranordnung t/l und λ ist bereits in der Literatur [3] angegeben worden, so daß wir hier nur das Ergebnis in unserer Schreibweise wiederholen. Als Bestimmungsgleichung für κ erhält man:

$$\frac{l}{t} = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \cos \lambda \ln \sqrt{\frac{\kappa^4 + 1 + 2\kappa^2 \cos 2\lambda + 2\kappa \cos \lambda}{1 - \kappa^2}} + \sin \lambda \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2\kappa \sin \lambda}{\kappa^4 + 1 + 2\kappa^2 \sin 2\lambda}} \right\}. \quad (20)$$

Auch hierbei kann die für die numerische Auswertung günstigere Umkehrfunktion $\kappa = f(t/l; \lambda)$ nicht angegeben werden. Die Auswertung dieser Gleichung ist in Zahlentafel 1 angegeben, woraus zu vorgegebenen Werten von t/l und λ der erforderliche κ -Wert entnommen werden kann. Für den Gittereinflußfaktor k_0 , der das Verhältnis der Zirkulation an der ebenen Platte im Gitter zu der der Einzelplatte angibt, erhält man:

$$k_0 = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{2t}{\pi l} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa^4 + 1 + 2\kappa^2 \cos 2\lambda}}. \quad (21)$$

Zahlentafel 1. Werte des Parameters κ der konformen Abbildung eines ebenen Plattengitters, nach Gl. (20)

$t/l \backslash \lambda$	0	$\pm 15^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 75^\circ$	$\pm 90^\circ$
0	1	1	1	1	1	1	—
0,25	0,996	0,997	0,998	0,999	1,000	1,000	—
0,50	0,916	0,919	0,938	0,965	0,987	0,999	—
0,75	0,781	0,782	0,810	0,848	0,911	0,975	—
1,00	0,656	0,658	0,685	0,722	0,775	0,857	1
1,25	0,557	0,561	0,579	0,609	0,647	0,697	0,725
1,50	0,481	0,484	0,499	0,518	0,542	0,566	0,585
1,75	0,419	0,423	0,435	0,450	0,464	0,477	0,432
2,00	0,371	0,375	0,383	0,395	0,404	0,411	0,421
2,25	0,335	0,339	0,343	0,350	0,355	0,359	0,363
2,50	0,314	0,315	0,317	0,320	0,323	0,325	0,326
∞	0	0	0	0	0	0	0

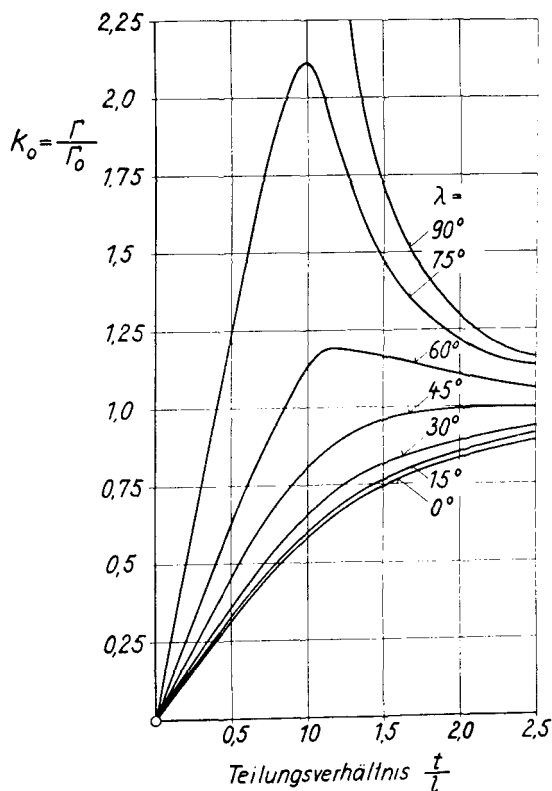
Zahlentafel 2. Werte des Gittereinflußfaktors k_0 für die Zirkulation des ebenen Plattengitters, nach Gl. (26)

t/l \ λ	0	$\pm 15^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 75^\circ$	$\pm 90^\circ$
0	0	0	0	0	0	0	—
0,25	0,159	0,165	0,179	0,225	0,318	0,615	—
0,50	0,318	0,328	0,358	0,450	0,636	1,230	—
0,75	0,463	0,481	0,523	0,658	0,904	1,836	—
1,00	0,584	0,602	0,657	0,815	1,132	2,111	∞
1,25	0,677	0,696	0,753	0,909	1,183	1,766	2,380
1,50	0,746	0,765	0,820	0,958	1,163	1,461	1,698
1,75	0,794	0,814	0,856	0,983	1,134	1,311	1,446
2,00	0,831	0,850	0,894	0,994	1,107	1,220	1,303
2,25	0,863	0,883	0,918	0,996	1,079	1,155	1,198
2,50	0,892	0,912	0,937	0,999	1,062	1,131	1,159
∞	1	1	1	1	1	1	1

Diese Funktion, die in Zahlentafel 2 und Abb. 2 angegeben wird, stellt wegen der Proportionalität zwischen Zirkulation und Auftrieb gleichzeitig auch das Verhältnis des Auftriebsanstieges der ebenen Platte im Gitter $(dc_A/d\alpha_g)_G$ zum Auftriebsanstieg der Einzelplatte $(dc_A/d\alpha_g)_E$ dar. Es sei an dieser Stelle jedoch darauf hingewiesen, daß der Auftriebsanstieg eines Profils im Gitter nicht mehr wie im Falle des Einzelprofils unabhängig von der speziellen Profilform ist, so daß das hier erhaltene Ergebnis auch nur für die ebene, unendlich dünne Platte gewertet werden darf. Der Auftriebsbeiwert der ebenen Platte im Gitter läßt sich wegen $(dc_A/d\alpha_g)_E = 2\pi$ angeben durch:

$$c_A = \frac{A}{\frac{\rho}{2} W_\infty^2 \cdot l} = 2\pi \cdot k_0 \cdot \alpha_g. \quad (22)$$

Für das ungestaffelte Plattengitter ($\lambda = 0^\circ$) ergeben sich

Abb. 2. Gittereinflußfaktor k_0 der ebenen Platte im Gitter als Funktion des Teilungsverhältnisses und des Stafflungswinkels; $k_0 = \left(\frac{dc_A}{d\alpha_g} \right)_G / \left(\frac{dc_A}{d\alpha_g} \right)_E$

besonders einfache Beziehungen, die der Vollständigkeit halber noch angeführt werden sollen (vgl. auch [1]):

$$\frac{U}{U_{\infty}} = 1 + \operatorname{tg} \alpha_g \frac{1}{\cos h \frac{\pi l}{2t}} \sqrt{\frac{\sin h \left[\frac{\pi l}{2t} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right]}{\sin h \left[\frac{\pi l}{2t} \left(1 + \frac{2x}{l} \right) \right]}}. \quad (23)$$

Außerdem ist:

$$k_0 = \frac{2t}{\pi l} \operatorname{tg} h \frac{\pi l}{2t}. \quad (24)$$

Aus den Symmetrieeigenschaften der Gl. (17) und (18) bezüglich des Winkels λ folgt ferner die wichtige Symmetriebeziehung für die Zusatzgeschwindigkeiten auf Saug- und Druckseite bei positiven und negativen Staffelungswinkeln:

$$\begin{aligned} u_{\text{Saug}}(-\lambda) &= -u_{\text{Druck}}(+\lambda), \\ u_{\text{Druck}}(-\lambda) &= -u_{\text{Saug}}(+\lambda). \end{aligned} \quad (25)$$

Die Berechnung der Winkelablenkung durch ein Plattengitter führt bei vorgegebenem Anstellwinkel α_g der Platte gegenüber der Translationsströmung W_{∞} zu folgenden Formeln für die Zu- und Abströmwinkel (Winkel siehe Abb. 4):

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta_1 &= - \frac{\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \alpha_g \left(1 + k_0 \frac{\pi l}{2t \cos \lambda} \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_g \operatorname{tg} \lambda}, \\ \operatorname{ctg} \beta_2 &= - \frac{\operatorname{tg} \lambda + \operatorname{tg} \alpha_g \left(1 - k_0 \frac{\pi l}{2t \cos \lambda} \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_g \operatorname{tg} \lambda}. \end{aligned} \quad (26)$$

Wichtiger erscheint die daraus ableitbare Beziehung für den Abströmwinkel eines Plattengitters bei vorgegebenem Zuströmwinkel β_1 :

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\left(1 - k_0 \frac{\pi l}{2t} \cos \lambda \right) - 2 k_0 \frac{\pi l}{2t} \sin \lambda}{1 + k_0 \frac{\pi l}{2t} \cos \lambda}, \quad (27)$$

die für das ungestaffelte Gitter ($\lambda = 0$) in die Beziehung

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = e^{-\pi \frac{l}{t}} \operatorname{ctg} \beta_1 \quad (28)$$

übergeht. Sie gibt zugleich die Möglichkeit zur angenäherten Berechnung der Änderung des Abströmwinkels bei Änderung der Zuströmrichtung für ein beliebiges Profil, indem man die Änderung der Zuströmung durch Überlagerung der Strömung durch ein ebenes Plattengitter gleicher Teilung und Staffelung erzeugt (vgl. [4]).

1) Das 90°-gestaffelte Gitter erhält man, indem die in Gl. (23) und (24) auftretenden hyperbolischen Funktionen durch die entsprechenden Kreisfunktionen ersetzt werden.

4. Bemerkungen zur numerischen Durchführung

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der in Gl. (22) und (23) auftretenden Glieder bezüglich des Kreiswinkels φ genügt eine vollständige numerische Auswertung in einem Winkelsegment von 90° . Für die Winkelsegmente ändern sich lediglich die Vorzeichen der einzelnen Glieder, so daß die Auswertung wesentlich verkürzt wird. Da hierbei die für die Rechnung benutzten Winkelwerte nur in einem Quadranten frei gewählt werden können, erhält man jedoch unter Umständen vor allem bei kleinen t/l und großem λ eine stark ungleiche Verteilung der Rechenpunkte im vorderen und hinteren Teil der Platte. Man ermittelt daher zweckmäßig zuerst die zu den gewählten φ -Werten gehörigen x -Werte. Ferner ist zu bemerken, daß in der Nähe der Winkelwerte, die mit der Plattenvorder- bzw. Hinterkante korrespondieren, wegen des singulären Verhaltens dieser Punkte die Rechengenauigkeit sinkt, so daß bei gleicher Genauigkeit des Endergebnisses für alle Rechenpunkte bei diesen mit höherer Stellenzahl zu rechnen ist.

Zahlentafel 3. Induzierte Tangentialgeschwindigkeiten an der ebenen Platte im Gitter für $t/l = 0,5$ und $\lambda = 0^\circ, 30^\circ$ und 60°

λ	0°	30°		60°	
x $l/2$	$\frac{u_{\text{Saug}}}{U_\infty \operatorname{tg} \alpha_g}$	$\frac{u_{\text{Saug}}}{U_\infty \operatorname{tg} \alpha_g}$	$\frac{u_{\text{Druck}}}{U_\infty \operatorname{tg} \alpha_g}$	$\frac{u_{\text{Saug}}}{U_\infty \operatorname{tg} \alpha_g}$	$\frac{u_{\text{Druck}}}{U_\infty \operatorname{tg} \alpha_g}$
— 1,0	∞	∞	— ∞	∞	— ∞
— 0,95	3,07	+ 3,85	— 3,56	5,2	— 4,6
— 0,9	2,13	2,53	— 2,34	3,59	— 3,15
— 0,85	1,65	1,87	— 1,78	2,95	— 2,61
— 0,8	1,299	1,438	— 1,478	2,45	— 2,303
— 0,7	0,845	0,954	— 1,121	1,750	— 2,005
— 0,6	0,593	0,589	— 0,923	1,256	— 1,871
— 0,5	0,424	0,311	— 0,805	0,809	— 1,807
— 0,4	0,307	0,096	— 0,732	0,383	— 1,769
— 0,3	0,223	— 0,074	— 0,682	— 0,025	— 1,751
— 0,2	0,162	— 0,209	— 0,650	— 0,462	— 1,742
— 0,1	0,118	— 0,316	— 0,628	— 0,879	— 1,738
\pm 0	0,086	— 0,388	— 0,610	— 1,192	— 1,736
0,1	0,063	— 0,440	— 0,600	— 1,417	— 1,735
0,2	0,046	— 0,480	— 0,592	— 1,549	— 1,735
0,3	0,033	— 0,509	— 0,589	— 1,628	— 1,734
0,4	0,024	— 0,529	— 0,584	— 1,678	— 1,734
0,5	0,018	— 0,543	— 0,582	— 1,703	— 1,733
0,6	0,013	— 0,555	— 0,580	— 1,718	— 1,733
0,7	0,009	— 0,561	— 0,579	— 1,722	— 1,732
0,8	0,006	— 0,568	— 0,577	— 1,724	— 1,732
0,9	0,004	— 0,571	— 0,576	— 1,728	— 1,731
1,0	0	— 0,575	— 0,575	— 1,730	— 1,730

Die Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung wurde für die drei Fälle $t/l = 0,5$, $\lambda = 0^\circ$, 30° und 60° durchgeführt. Die auf graphischem Wege für abgerundete Werte von x interpolierten Endergebnisse sind in Zahlentafel 3 enthalten. Wegen der Symmetrieeigenschaften liefert die Rechnung auch die Ergebnisse für die entsprechenden negativen Staffelungswinkel. Die Zusatzgeschwindigkeiten an der Platte gegenüber der Anströmungsgeschwindigkeit U_∞ sind in Abb. 3 aufgetragen. Die Differenz der Ordinaten auf Saug- und Druckseite stellt unmittelbar die Zirkulationsverteilung der ebenen Platte dar. Für das ungestaffelte Plattengitter ist die induzierte Zusatzgeschwindigkeit tangential zur Platte gleich $\pm \gamma/2$ (Symmetrie zur Abszisse). Beim gestaffelten Gitter werden dagegen zusätzliche Tangentialgeschwindigkeiten längs der Platte induziert, die für positive Staffelungswinkel (Verzögerungsgitter) im wesentlichen entgegen der Anströmungsrichtung, für negative Staffelungswinkel (Beschleunigungsgitter) dagegen in Richtung der Anströmung verlaufen. Der Vergleich mit der Zirkulationsverteilung der Einzelplatte zeigt vor allem, daß der Zirkulationsschwerpunkt im Gitter

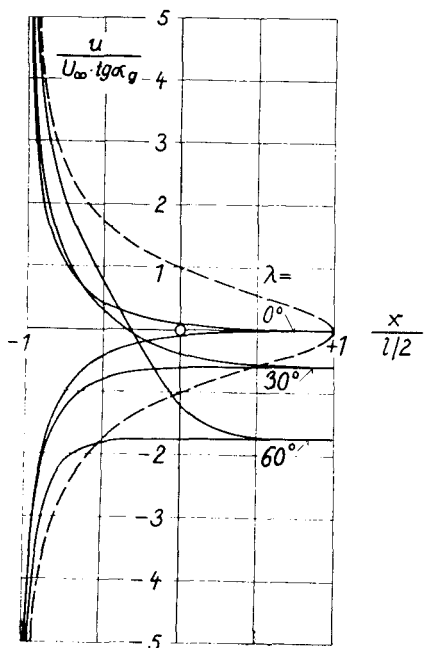


Abb. 3.
Induzierte Tangentialgeschwindigkeiten auf der Kontur der ebenen Platte im Gitter für $t/l = 0,5$ und $\lambda = 0^\circ, 30^\circ$ und 60° (die gestrichelte Linie stellt die Einzelplatte dar)

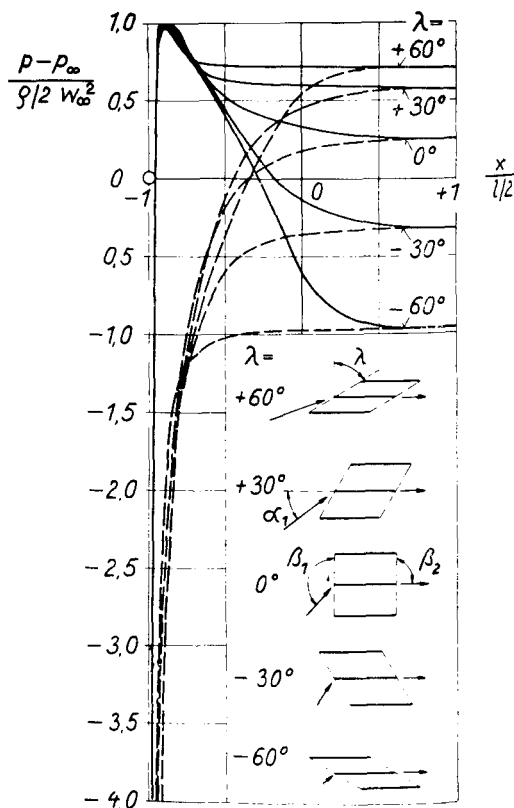


Abb. 4. Druckverteilung auf der Kontur der ebenen Platte im Gitter für $t/l = 0,5$ bei verschiedenen Staffelungswinkeln. Der Auftriebsbeiwert beträgt für alle Verteilungen $c_A = 1$. Die Kenngrößen der Strömung sind aus Zahlentafel 4 zu entnehmen.
— — — Druckseite; - - - Saugseite

über den $l/4$ -Punkt hinaus nach vorn rückt. Abb. 4 zeigt schließlich die Druckverteilungen für die berechneten Plattengitter für einen Auftriebsbeiwert von $c_A = 1$. Hierbei ist der Druck p an der Plattenkontur als Differenzdruck gegenüber dem Druck p_∞ aufgetragen, der zur Geschwindigkeit W_∞ gehört ($p_\infty + \frac{\rho}{2} W_\infty^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} W_1^2$), und zur Dimensionslosmachung der Staudruck $\frac{\rho}{2} W_\infty^2$ der Translationsströmung verwendet. Besonders augenfällig ist, wie sich der Druck im hinteren Teil der Platte an den Druck hinter dem Gitter angleicht. In Zahlentafel 4 sind die wichtigsten Kenngrößen der zu Abb. 4 gehörigen Plattengitterströmung zusammengestellt.

Zahlentafel 4. Kenngrößen der Strömung durch ein Plattengitter mit $t/l = 0,5$ und $c_A = 1$ bei verschiedenen Staffelungswinkeln λ

λ^0	k_0	α_g^0	β_1^0	β_2^0	α_1^0	α_2^0	$\frac{W_2}{W_1}$	$\frac{p_1 - p_\infty}{\frac{\rho}{2} W_\infty^2}$
- 60	0,636	14,5	73,0	30,0	43,0	0	1,912	+ 0,463
- 30	0,367	25,7	113,1	60,0	53,1	0	1,062	- 0,172
0	0,317	30,1	139,1	90,0	49,1	0	0,655	- 0,742
+ 30	0,367	25,7	157,0	120,0	27,0	0	0,452	- 1,080
+ 60	0,636	14,5	169,0	150,0	19,0	0	0,362	- 1,173

5. Zusammenfassung

Die konforme Abbildung der Strömung durch ein Plattengitter auf die Kreiszyylinderströmung wird erläutert und eine Formel für die Geschwindigkeitsverteilung auf der Kontur der ebenen Platte abgeleitet. Ferner werden die für die Abbildung erforderlichen universellen Parameter tabelliert wiedergegeben. Als Beispiel wird die Druckverteilung der ebenen Platte im Gitter für ein Teilungsverhältnis $t/l = 0,5$ bei den Staffelungswinkeln $\lambda = 0^\circ, 30^\circ$ und 60° berechnet.

Literatur

- [1] R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917.
- [2] F. Weinig, Die Strömung um die Schaufeln vor Turbomaschinen. Leipzig 1935.
- [3] Th. v. Kármán, J. M. Burgers, General Aerodynamic Theory-Perfect Fluid. Beitrag im Handbuch „Aerodynamic Theory“, Vol. II, Div. E, herausgegeben von F. Durand, Berlin 1935.
- [4] N. Scholz, Ein Berechnungsverfahren zum Entwurf von Schaufelgitterprofilen (erscheint im VDI-Forschungsheft 442: „Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern“).

Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig.